Esempio di studio di equazione differenziale ordinaria lineare

Quesito: Sia x la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + x(t) = e^t, \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 2. \end{cases}$$

Quanto vale $x(\pi)$?

Soluzione: Un sistema fondamentale di soluzioni dell'omogenea associata è dato da $\{\cos(t), \sin(t)\}$. Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Poiché 1 non è zero del polinomio caratteristico $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$, cercheremo una soluzione ϕ nella forma $\phi(t) = pe^t$, con p reale. Deve allora essere

$$pe^t + pe^t = e^t,$$

da cui $p = \frac{1}{2}$. L'integrale generale dell'equazione è allora

$$\{c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \frac{e^t}{2} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Determiniamo la soluzione del problema di Cauchy. Se $\phi(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + \frac{e^t}{2}$, si ha $\phi'(t) = -c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t) + \frac{e^t}{2}$, da cui il sistema

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{2} = 0, \\ c_2 + \frac{1}{2} = 2, \end{cases}$$

con soluzione $(c_1, c_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. La soluzione del problema di Cauchy è dunque

$$x(t) = -\frac{1}{2} \cos(t) + \frac{3}{2} \sin(t) + \frac{e^t}{2},$$

da cui

$$x(\pi) = \frac{1 + e^\pi}{2}.$$